

Gruppenübung 12

Diffeomorphismen

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : U \rightarrow V$ heißt *globaler Diffeomorphismus* wenn

- f eine inverse Funktion $f^{-1} : V \rightarrow U$ hat und
- sowohl f als auch f^{-1} unendlich oft differenzierbar sind.

Um zu überprüfen ob eine Abbildung ein globaler Diffeomorphismus ist, ist folgende Charakterisierung hilfreich [1]:

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Diffeomorphismus wenn

- f unendlich oft differenzierbar ist,
- die Jacobimatrix von f an allen Stellen $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar ist und
- $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$.

Aufgabe 1 Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\phi(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} (1 + x_2^2 x_1^2) \arctan(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Abbildung. Handelt es sich um einen globalen Diffeomorphismus?

Lösung:

Die Jacobimatrix $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{1+x_1^2 x_2^2}{1+x_1^2} + 2x_1 x_2^2 \arctan(x_1) & 2x_1^2 x_2 \arctan(x_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.h. die Determinante der Jacobimatrix ist gegeben durch $\frac{1+x_1^2 x_2^2}{1+x_1^2} + 2x_1 x_2^2 \arctan(x_1)$. Beide Summanden des Ausdrucks sind nicht-negativ, außerdem ist der erste Summand strikt positiv für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Damit ist die Determinante immer größer als Null und die Jacobimatrix immer invertierbar. Es handelt sich also um einen lokalen Diffeomorphismus. Es handelt sich allerdings um keinen globalen Diffeomorphismus weil $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht invertierbar ist. Um das zu sehen stellen wir eine kurze Überlegung an. Um invertierbar zu sein muss ϕ surjektiv sein, es muss also für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ geben so dass $(u, v) = \phi(x, y)$. Sei nun $v = 0$ und $u \in \mathbb{R}$, dann suchen wir ein (x, y) mit $(u, 0) = \phi(x, y)$, genauer

$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + x^2 y^2) \arctan(x) \\ y \end{pmatrix},$$

d.h. es muss sicher $y = 0$ gelten. Dann folgt aber $u = \arctan(x)$. Weil $\arctan(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt, finden wir für $u \in \mathbb{R} \setminus (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aber kein x mit $u = \arctan(x)$ und damit ist ϕ nicht surjektiv, also

nicht invertierbar und damit sicher auch kein globaler Diffeomorphismus.

Im vorliegenden Fall sieht man auch dass die Bedingung $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|\phi(x)\| = \infty$ nicht erfüllt ist, denn für eine beliebige Folge (x_n, y_n) mit $y_n = 0$ und $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\|\phi(x_n, y_n)\| = |\arctan(x_n)| \leq \frac{\pi}{2}$$

und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\| = \infty$ aber $\forall n : \|\phi(x_n, y_n)\| \leq \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2 Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert durch

$$\phi(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \exp(x_1) \cos(x_2) \\ \exp(x_1) \sin(x_2) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix und deren Inverse. Handelt es sich um einen globalen Diffeomorphismus?

Lösung:

Die Jacobimatrix $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \exp(x_1) \cos(x_2) & -\exp(x_1) \sin(x_2) \\ \exp(x_1) \sin(x_2) & \exp(x_1) \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

die Inverse durch

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}^{-1} = \begin{pmatrix} \exp(-x_1) \cos(x_2) & \exp(-x_1) \sin(x_2) \\ -\exp(-x_1) \sin(x_2) & \exp(-x_1) \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Damit handelt es sich also um einen lokalen Diffeomorphismus. Sei nun $u, v \neq 0$ so dass

$$u = \exp(x_1) \cos(x_2) \quad v = \exp(x_1) \sin(x_2).$$

Es ist immer möglich x_1 und x_2 so zu wählen dass diese Gleichungen erfüllt sind, denn

$$\frac{v}{u} = \tan x_2$$

hat sicher eine Lösung x_2 woraus sich x_1 ergibt. D.h. ϕ ist surjektiv, es gibt also für jeden Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ so dass $\phi(x_1, x_2) = (u, v)$ gilt. Allerdings gilt wegen der 2π -Periodizität der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} u &= \exp(x_1) \cos(x_2 + 2k\pi) \\ v &= \exp(x_1) \sin(x_2 + 2k\pi). \end{aligned}$$

D.h. ϕ ist nicht injektiv und damit sicher nicht invertierbar.

Aufgabe 3 Sei $\phi : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\phi(r, \theta) := \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Abbildung. Begründen Sie, warum es sich um keinen globalen Diffeomorphismus handelt. Was muss man ändern um einen globalen Diffeomorphismus zu erhalten?

Lösung:

Die Jacobimatrix $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ von ϕ ist gegeben durch

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\det\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = r$. Gemäss Annahme ist $r > 0$ also ist die Jacobimatrix immer invertierbar und somit liegt ein lokaler Diffeomorphismus vor. Die Abbildung ist aber sicher nicht invertierbar, denn für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$r \cos(\theta) = r \cos(\theta + 2k\pi) \quad r \sin(\theta) = r \sin(\theta + 2k\pi).$$

Um aus der Abbildung einen globalen Diffeomorphismus zu machen muss man den Definitionsbereich und den Bildbereich geeignet einschränken. Aufgrund der trigonometrischen Funktionen schränken wir den Definitionsbereich ein auf $\mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi)$, als Bildbereich ergibt sich dann $\phi(\mathbb{R}_{>0}, [0, 2\pi)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Aufgabe 4 Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein globaler Diffeomorphismus und

$$\dot{x} = f(x)$$

eine Differentialgleichung mit differenzierbarem Vektorfeld f . Wir definieren neue Koordinaten durch $z = \phi(x)$. Wie lautet die Differentialgleichung in z -Koordinaten?

Lösung:

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich

$$\dot{z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_x \dot{x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{\phi^{-1}(z)} f(\phi^{-1}(z)).$$

Aufgabe 5 Sei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein globaler Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \cdot \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial z} \Big|_z = I.$$

Lösung:

Es gilt

$$\Phi(\Phi^{-1}(z)) = z.$$

Mit der Kettenregel erhält man

$$\frac{\partial \phi(\phi^{-1}(z))}{\partial z} \Big|_z = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \cdot \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial z} \Big|_z.$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial z}{\partial z} = I.$$

Damit erhält man das gewünschte Ergebnis durch Differenzieren der Gleichung

$$\phi(\phi^{-1}(z)) = z$$

nach z .

Aufgabe 6 Betrachten Sie das System

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \exp(x_2)u$$

$$\dot{x}_2 = x_1x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

$$y = x_3.$$

Bestimmen Sie den relativen Grad, transformieren Sie das System in eingangsnormalisierte Byrnes-Isidori-Normalform.

Lösung:

Im vorliegenden Fall gilt

$$L_g h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_f h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2$$

$$L_g L_f h(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

d.h. wir haben einen wohldefinierten relativen Grad $r = 2$. Für die Transformation $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$z_1 = \phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \phi_2(x) = L_f h(x) = x_2$$

$$z_3 = \phi_3(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \dot{x}_3 \\ &= \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} (-x_1 + \exp(x_2)u) + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} (x_1x_2 + u) + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} x_2. \end{aligned}$$

Wir suchen ϕ_3 so, dass der Eingang u nicht explizit in der rechten Seite von $\dot{z}_3$ steht, das heißt wir suchen ϕ_3 so, dass

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \exp(x_2) + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = 0.$$

Man prüft durch elementare Rechnungen nach, dass $\phi_3(x) = 1 + x_1 - \exp(x_2)$ diese Bedingung erfüllt. Somit ist ϕ festgelegt. Dabei wurde ϕ_3 bewusst so gewählt, dass $\phi(0) = 0$ gilt, sodass sich für $z = 0$ ebenso wie für $x = 0$ eine Ruhelage ergibt. Die Jacobimatrix von ϕ ist gegeben durch

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\exp(x_2) & 0 \end{pmatrix}.$$

da die Jacobimatrix immer nichtsingulär ist, liegt ein lokaler Diffeomorphismus vor. ϕ^{-1} ist gegeben durch

$$x_1 = -1 + z_3 + \exp(z_2)$$

$$x_2 = z_2$$

$$x_3 = z_1.$$

Da sowohl ϕ als auch ϕ^{-1} glatt sind, handelt es sich um einen globalen Diffeomorphismus. In z -Koordinaten lauten die Systemgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= (-1 + z_3 + \exp(z_2))z_2 + u \\ \dot{z}_3 &= (1 - z_3 - \exp(z_2))(1 + z_2 \exp(z_2)).\end{aligned}$$

Aufgabe 7 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \exp(x_2)u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 + \exp(x_2)u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 \\ y &= x_3.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Transformation in Byrnes-Isidori-Normalform, prüfen Sie ob die Transformation ein lokaler oder ein globaler Diffeomorphismus ist. Bestimmen Sie eine exakte E/A-Linearisierung.

Lösung:

Für das vorliegende System gilt

$$\begin{aligned}L_g h(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ L_f h(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 \\ L_g L_f h(x) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ L_f^2 h(x) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = -x_1 - x_2^2 \\ L_g L_f^2 h(x) &= \begin{pmatrix} -1 & -2x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ \exp(x_2) \\ 0 \end{pmatrix} = -(1 + 2x_2) \exp(x_2).\end{aligned}$$

D.h. das System hat einen relativen Grad von $r = 3$ wenn $1 + 2x_1 \neq 0$ gilt. Damit ist die Transformation in Byrnes-Isidori-Normalform festgelegt durch

$$\begin{aligned}z_1 &= h(x) = x_3 \\ z_2 &= L_f h(x) = x_1 - x_2 \\ z_3 &= L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\det \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2x_2 & 0 \end{pmatrix} = -2x_2 - 1.$$

Damit ist die Jacobimatrix der Transformation invertierbar wenn $1 + 2x_1 \neq 0$ gilt und damit ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus.

Es gilt

$$\dot{z}_3 = -2x_2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)\exp(x_2)u.$$

Wählt man

$$u = \frac{-2x_2(x_1 + x_2^2)}{(1 + 2x_2)\exp(x_2)} - \frac{1}{(1 + 2x_2)\exp(x_2)}v$$

so erhält man für $1 + 2x_2 \neq 0$ die E/A-Linearisierung

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

Literatur

- [1] Wu, Felix and Desoer, Charles, Global inverse function theorem, IEEE Transactions on Circuit Theory, 1972, Volume 19, Number 2, 199–201.